

CAPÍTULO V

DEL CRECIMIENTO ARMONIOSO

...Sensa il suo suffragio, non se possa mai formare el pentagono, et senza el pentagono, non e possibile formare ne immaginare el corpo nobilissimo supra tutti gli altri regulati ditto el duedecedron... la cui forma el divin Platone atribué a la s. essentia cive al cielo.

FRA LUCA PACCIOLI DI BORGO
"De Divina Proportione"

Todo sistema físico-químico aislado (y en el cual no se encuentran organismos vivos) tiende hacia una posición de equilibrio estable según una evolución regida por el principio de mínima acción (principio de acción estacionaria de la teoría de la relatividad), cuya forma estadística es, como hemos visto en el capítulo precedente: "Un sistema (por ejemplo un universo) evoluciona constantemente de los estados menos probables a los más probables, siendo la configuración de probabilidad máxima al mismo tiempo la de entropía máxima, la de mayor degradación de energía". Cuando el estado de equilibrio final da lugar a configuraciones relativamente estables e incluso rígidas, como en los cristales, pueden resultar formas o agrupaciones aproximadamente geométricas cuyos detalles están igualmente determinados por incidencias especiales del principio general antes recordado: ley de equipartición de la energía, ley de la energía potencial de superficie mínima ⁽¹⁾, ley de repartición homogénea o simétrica de los elementos moleculares y atómicos.

Ahora bien, entre las doscientas treinta agrupaciones posibles establecidas combinando estas leyes con la teoría de las particiones homogéneas del espacio, se encuentran las redes cúbicas y exagonales y todas sus mutuas combinaciones, pero nunca el pentágono ni el sistema pentagonal; del mismo

(1) Un cuerpo tiende a tomar la forma que presenta una energía superficial mínima compatible con las fuerzas de orientación (Curie). Este mínimo de la energía potencial de superficie introduce como solución (para un volumen dado) la que da la superficie mínima compatible con las conexiones.

modo, en las formaciones cristalinas o geométricas que ofrece realmente el reino inorgánico, se encuentra el tetraedro, el cubo (y su recíproco el octaedro) y todos sus derivados *arquimedeanos* u otros, de simetría ortogonal u oblicua, pero nunca los dos cuerpos platónicos de armadura pentagonal, es decir, el dodecaedro y su recíproco el icosaedro, ni ninguno de sus derivados.

El estudio general de las redes isotrópicas (véase el capítulo iv) podía ya hacer prever una preferencia de los sistemas en equilibrio por las redes cúbicas o exagonales, o una combinación de estos dos tipos (tipo cuboctaedro, poliedro de Kelvin, dodecaedro rómbico, etc.). La ley de los índices racionales (que no sólo es una observación empírica, sino que puede deducirse teóricamente del estudio general de los grupos de simetría y de la ley de particiones homogéneas del espacio) prueba que la comprobación del hecho precedente tiene una razón lógica que excluye rigurosamente que el pentágono, el dodecaedro y el icosaedro, puedan aparecer en una forma cristalina inorgánica.

El examen microscópico de los cristales de nieve da una de las manifestaciones más características de la simetría exagonal ⁽²⁾. En la lámina 29 reproduzco algunos tipos diferentes de dichos cristales ⁽³⁾.

Pero el pentágono y su derivado superior, el dodecaedro caro a Platón, toman inesperado desquite cuando se pasa al examen de los sistemas vivos o que contienen vida. Basta hojear un atlas de Botánica o un libro de Zoología para observar que en ellos, al contrario, las formas pentámeras (de simetría pentagonal) aparecen a menudo e incluso con más frecuencia que las derivadas de los sistemas cúbico y exagonal.

Esta observación ha sido hecha recientemente por algunos sabios que, conociendo a fondo la Cristalografía, han aplicado la teoría de la simetría al estudio morfológico de los seres vivos. Me refiero a F. M. Jaeger ⁽⁴⁾: "Tanto en el caso de los animales como de las plantas, parece existir cierta preferencia por la simetría pentagonal, una simetría claramente relacionada con la importante proporción de la *sección áurea* y desconocida en el mundo de la materia inerte... En efecto, desde el punto de vista del papel desempeñado por el principio de simetría es difícil negar que haya una línea fronteriza de demarcación entre las formas del reino inorgánico y las formas vivas; en éstas, la evolución gradual de las formas a partir de una simetría perfec-

(2) Véase Kepler, *De Nive Sexangula*.

(3) Los trazados de pavimentos obtenidos en el capítulo iv por medio de las particiones homogéneas del plano son también todas de tipo *crystalino*, con simetría cúbica o exagonal.

(4) *Lectures on the Principle of Symmetry*, págs. 195 y 196. La casa Gauthier-Villars publicó una traducción francesa de esta obra en 1925.

ta (esférica) hacia una simetría inferior, y la preferencia característica por la razón inconmensurable de la sección áurea; en aquellas, la tendencia hacia una simetría más perfecta, como condición de una mayor estabilidad mecánica, y la exclusión de toda relación irracional en los períodos de los ejes de simetría”.

Jaeger muestra que en los radiolarios de Haeckel se encuentran los cinco poliedros regulares, mientras que en las formas cristalinas minerales jamás aparece el dodecaedro regular ni el icosaedro.

“Estas dos formas no se encuentran nunca en Cristalografía... en la que se ha probado que no pueden producirse, porque sus índices (coeficientes que expresan las relaciones de las caras planas con los tres ejes principales de simetría) son irracionales. Ahora bien, una de las leyes cristalográficas fundamentales, deducida de la teoría matemática de las particiones del espacio, es que los índices de cualquiera de las caras de un cristal son números enteros pequeños... El dodecaedro pentagonal del radiolario ⁽⁵⁾ es perfectamente regular, y debemos presumir que no es el resultado de los mismos principios de partición del espacio que los establecidos en Cristalografía”.

En efecto, en el mundo vivo, el principio de mínima acción y sus variantes proteiformes (Hamilton, Curie, Gibbs, Boltzmann, Mie) no ejercen ya una dictadura absoluta como entre los sistemas inorgánicos. El equilibrio estático que converge hacia las hermosas redes cristalinas es el menor de los cuidados del organismo vivo. Hay otros dos *desiderata* con los cuales los principios de simetría y de equilibrio deben ponerse de acuerdo más tarde: el crecimiento y la reproducción reguladas por una ley de economía, no ya de la acción o de la energía, sino de la sustancia. Mientras que en un sistema puramente físico-químico, aunque fuera tan grande como el universo estelar, el sistema de Hamilton-Mie ⁽⁶⁾ permite prever teóricamente el desarrollo del devenir, un sistema aislado en el que se encuentra un poco de materia viva,

⁽⁵⁾ El radiolario en cuestión pertenece al grupo de los circopóridos: es el *Circorhagma dodecaedra*. Esta forma se encuentra también en otros radiolarios de veinte ejes y en el polen de muchas plantas (*Fumaria spicata*, *Buchholzia maritima*, etc.). El grupo de los circopóridos reproduce también el icosaedro regular (*Circogonia icosaedra*, forma que se vuelve a encontrar en muchos radiolarios de doce ejes) y el octaedro (*Circoporus octaedrus*). Citemos, también para completar los cinco cuerpos platónicos, los radiolarios *tetraplekta* y *Lithocubus*, de forma tetraédrica y cúbica, respectivamente.

No poseo, por desgracia, una fotografía del *Circorhagma dodecaedra*, que hubiese dedicado a los manes de Paccioli.

Citemos, entre otros organismos marinos de tendencias geometrizzantes los *Hexactinellæ* (o esponjas de vidrio) formadas por redes de silicato transparente de seis ejes rectangulares que producen la forma cristalina del cubo o del octaedro, y la familia de las *Cubomedusæ* o medusas cúbicas.

⁽⁶⁾ Véase el capítulo precedente.

animal o vegetal, así sea la pareja de conejos de Leonardo da Pisa o la amiba microscópica o autofecundante (*paramæcium*) de la que un biólogo norteamericano cultivó en trece años más de 8.000 generaciones ⁽⁷⁾, no parece obedecer ya a la economía de trabajo e ignora a menudo las líneas geodésicas de acción estacionaria galantemente ofrecidos por los *pulpos de referencia* de servicio. Y ésto no en forma arbitraria, sino a fin de permitir a la vida, una vez encarnada, construir su receptáculo morfológico, adaptarse y perpetuarse. Si no hay economía de trabajo resistente ⁽⁸⁾ hay, en cambio, sobre todo en las especies que han llegado a un grado avanzado de evolución, una notable economía de materia, de sustancia, que no se manifestaba en los sistemas inorgánicos ⁽⁹⁾.

Esta economía de sustancia, realizada con un éxito extraordinario especialmente en las plantas, los pájaros y los animales de rápido andar, deriva no de principio alguno de Mecánica general, sino de una necesidad teleológica, la lucha contra la gravedad terrestre, para permitir a las plantas llegar a la luz, a los pájaros volar, a los animales correr o saltar. La arquitectura gótica ha tratado en forma análoga el problema del empuje vertical: lucha contra la acción de la gravedad; de igual modo, ha realizado una notable economía de materia con respecto a las alturas alcanzadas.

C. Culmann, el fundador de la Estática gráfica, ya había observado que los huesos del hombre y de los animales aparecen como un sistema que tiene la máxima resistencia con el mínimo de sustancia. La disposición de las células en las partes esponjosas de los huesos que deben sostener grandes es-

⁽⁷⁾ Estas 8.000 generaciones de protozoarios nacidas de un sólo individuo formarían juntas un volumen más grande que el globo terráqueo. La experiencia tenía por objeto comprobar si el poder de reproducción sin que intervenga la fecundación sexual se agotaba o no al cabo de cierto número de generaciones. No conozco el resultado final de la experiencia, pero en la época del último comunicado que tuve a la vista (8.460 generaciones) no se había manifestado ninguna degradación de vitalidad.

⁽⁸⁾ El principio de mínima acción implica una economía, una pereza, un menor esfuerzo, en lo que concierne al trabajo llamado *resistencia* en Mecánica, es decir, al trabajo que acumula energía como el que consiste en estirar un resorte, o levantar un volumen de agua. El menor esfuerzo armoniza, por el contrario, con el mayor gasto posible de trabajo acumulado con anterioridad, cuyo desgaste no exige ningún esfuerzo: la energía obtenida al soltar un resorte estirado, al dejar caer un peso, al encender un combustible (degradación de la energía).

Helmholtz fue el primero que observó esta línea de demarcación matemática entre los fenómenos físico-químicos y el fenómeno vital.

⁽⁹⁾ “Hay una fuerza (que observamos en todas las especies vivas actuales, y que no estaba tan marcada en las especies desaparecidas) que tiende a la economía de la sustancia ósea, con la distribución de materia constituyente que realiza el máximo de potencia en todas las direcciones requeridas” (D’Arcy Thompson: *Growth and Form*. Cambridge University Press).

fuerzos, presentará, por ejemplo, los diagramas que la Estática gráfica prevé precisamente como curvas de máxima resistencia a la tracción y a la flexión. El examen microscópico de los tallos de las plantas demuestra que en ellos el problema de la máxima resistencia con el mínimo de materia tiene soluciones que harían honor a un ingeniero ⁽¹⁰⁾.

El hecho de que el principio de mínima acción no se aplique rigurosamente a un sistema aislado que contiene materia viva, no significa que no se cumplan en él las leyes físico-químicas, sino que dicho sistema no se comporta ya como un sistema aislado. La vida actúa (o puede actuar) como una fuerza exterior cuando está localizada en él, en el sentido de que una fuerza que procede de la tercera dimensión fuera exterior respecto de un mundo plano ⁽¹¹⁾ para los observadores infinitamente aplastados de Poincaré.

⁽¹⁰⁾ El biólogo alemán Francé estableció la *Biotécnica*, ciencia que consiste en copiar o aplicar a la técnica humana los *inventos*, los esquemas mecánicos dados por los animales y las plantas. Entre otros, citaré una sembradora construída durante la guerra en la cual la dispersión homogénea de los granos se obtuvo por medio de un dispositivo copiado de la cápsula de la adormidera. Véase también en la *Science Moderne*, enero de 1926, el artículo del profesor M-L. Cuénot, de la Facultad de Ciencias de Nancy, sobre las *Coupiaciones* (por ejemplo, el órgano de salto en los elatéridos).

⁽¹¹⁾ En este mismo orden de ideas ciertos geómetras familiarizados con el espacio tetradimensional creen que la vida actúa en la cuarta dimensión. Según las teorías relativistas el tiempo es la cuarta dimensión y la vida podría concebirse como actuando en la quinta dimensión.

He aquí un ejemplo concreto de acción exterior: Un péndulo que oscila y una probeta en que se realiza una reacción química se colocan sobre una mesa. Puedo considerar la mesa, la probeta y el péndulo (sería preciso decir *péndulo-globo terrestre*, para introducir correctamente la función potencial del péndulo) como un sistema aproximadamente aislado. El principio de Hamilton, aplicado en forma adecuada, permite prever lo que sucederá mientras no intervenga una fuerza exterior. Si en la misma cámara, un observador da un golpe al péndulo o vierte ácido sulfúrico en la probeta o si una ráfaga de viento revuelve la habitación, el sistema mesa-probeta-péndulo deroga las ecuaciones hamiltonianas precedentemente establecidas, ya que la intervención de estas fuerzas no había sido prevista y no podía serlo por ellas porque —de acuerdo con las *reglas del juego*— sólo habíamos introducido datos resultantes de energías potenciales, cinéticas, químicas, etc., del sistema mesa-probeta-péndulo. Ahora bien, podría producirse una discordancia análoga si se agregara al sistema una redoma con peces rojos o, más sencillamente, si la probeta contuviera un cultivo microbiano; pero hay una diferencia, y es que en la acción directa del personaje que golpea el péndulo, o vierte el ácido sulfúrico, las fuerzas que intervienen, aunque exteriores al sistema arbitrariamente escogido, se mueven en el mismo *espacio* y pueden aumentar directamente o absorber las energías tanto potenciales como cinéticas de este sistema. Puede haber adición o sustracción, no sólo de energía, sino también de sustancia. Al contrario, la acción de la vida se manifiesta verdaderamente como si proviniese de una dirección *perpendicular* perteneciente al espacio de cuatro o cinco dimensiones: no agrega ni reduce nada a la masa o a la energía total, pero puede retardar o detener los desgastes de energía potencial (véase la nota siguiente) actuando en oposición al prin-

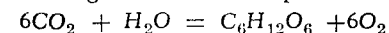
Desde este punto de vista, puramente determinista, no es riguroso el principio de Hamilton ni permite prever el *devenir*. Sería preciso completarlo en cada caso con términos y coeficientes empíricos o estadísticos en los que intervendrían ciertas probabilidades.

El sabio moderno ya no tiene derecho a burlarse de las palabras empíricas; las bellas ecuaciones diferenciales de antes se han convertido en aproximaciones; el determinismo clásico, cuya austera actuación habían establecido Laplace y Lagrange, ha sido reemplazado por un determinismo estadístico, y la física molecular de hoy no se distingue ya rigurosamente de las disciplinas a las que hace treinta años se negaba el título de ciencias exactas: Economía política, Biometría, estadísticas de mortalidad o de accidentes. El cálculo de probabilidades ha sustituido la causalidad directa al introducir la *ley de los grandes números* cuando las causas múltiples están en escala microscópica con respecto al sistema considerado.

Contrariamente a lo que se podría creer, la Química vegetal está más a menudo en contradicción con la segunda ley de la energética que la Biología animal; el efecto sobre la atmósfera del metabolismo vegetal es, contrariamente al del metabolismo animal, absorber el ácido carbónico y emitir oxígeno, y la fotosíntesis continua del almidón por las plantas constituye una reacción endotérmica más *improbable* aún, que el químico no podría reproducir sino a una temperatura muy alta con aducción de energía ⁽¹²⁾ y

cipio de Hamilton bajo su forma de *degradación de la energía*. La acción exterior de la vida terrestre no se manifestará en las ecuaciones de orden interplanetario o interestelar en las cuales figuran, en general, trayectorias de centros de gravedad, porque los esfuerzos mecánicos sin puntos de apoyo exterior no pueden, aunque estén coordinados y dirigidos conscientemente, influir sobre la trayectoria del centro de gravedad de un sistema (lo que demuestra la Mecánica racional por el postulado de la igualdad de la acción y la reacción; ejemplo concreto: un hombre que camine hacia la proa de una barca atracada en aguas muertas, no podrá desembarcar, porque la barca retrocederá automáticamente a fin de mantener invariable la posición del centro de gravedad del sistema barca-hombre). La acción de la vida o de fuerzas conscientemente dirigidas al interior de un sistema en movimiento puede, sin embargo, desempeñar el papel del *demonio de Maxwell* y actuar de manera directa, en ningún caso sobre la trayectoria del centro de gravedad, sino sobre el momento de inercia de un sistema en rotación, modificando a voluntad la velocidad angular de éste. Puesto que el producto $M\omega^2$ es constante, un aumento de M exige, en efecto, una disminución de ω y a la inversa. (Esto no fue comprendido hasta fines del siglo XIX y permitió explicar la *paradoja del gato que cae*).

⁽¹²⁾ La absorción de la energía degradada de la radiación solar por la clorofila de las hojas verdes da lugar a la siguiente reacción *improbable*:



(ácido carbónico + agua = dextrosa + oxígeno); la dextrosa se transforma en seguida en almidón ($\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_5$).

“La manera de ser del organismo vivo implica la inversión de la segunda ley de

que, con sustancias energéticamente degradadas como el agua, el ácido carbónico, y una energía de muy baja tensión, fabrica enormes cantidades de sustancias de muy alto potencial químico y calorífico.

El principio de mínima acción da, pues, una especie de tela, una alfombra, a las geodésicas hamiltonianas que la vida hace a veces ondular. En estas ondulaciones, el principio llega a ser *el menor esfuerzo compatible con el fin*, con las directivas que la vida parece proponerse. Hay todavía mínimos y máximos deseables, pero no son los mismos.

W. Bancroft (*Revue Scientifique*, 28 de septiembre de 1912) da, por ejemplo, la transposición biológica siguiente de la tendencia al equilibrio estable de los sistemas inorgánicos: "Los cambios que afectan a un sistema (biológico) son tales que tienden a reducir al mínimo la perturbación de origen exterior"⁽¹³⁾.

Estas tendencias de orientaciones teleológicas (como la antes citada, de la economía de sustancia) pueden conducir a veces a las mismas soluciones que los sistemas inorgánicos. En los tejidos de células esféricas, la economía máxima de sustancia podrá dar las mismas equiparticiones que las leyes de tensión superficial mínima y de superficie mínima. Se encuentran redes exagonales planas o curvas en muchos tejidos o agrupaciones vivas⁽¹⁴⁾.

Además de sus condiciones especiales de equilibrio de tipo pragmático y de su tendencia a la economía, y en ningún caso del trabajo, sino de la materia misma, los organismos vivos presentan también un fenómeno característico, al menos como modalidad: el del crecimiento. Los cristales inorgá-

la Termodinámica... En los fenómenos orgánicos, las diferencias de energía no tienden por sí mismas a la nivelación... En las manifestaciones de la vida, consideradas como un todo, lo que observamos es una tendencia a la perpetuación de las fuentes de energía. En los fenómenos puramente inorgánicos, la energía tiende a ser degradada, pero las reacciones orgánicas se oponen a esta tendencia... En los procesos vivos el aumento de la entropía es retardado". (J. Johnstone, *The Mechanism of Life*, Londres, 1921).

Véase también H. Guilleminot, *La Matière et la Vie*, Flammarion, editor, París. Estas inversiones y suspensiones *improbables* de la segunda ley de la Termodinámica se producen continuamente en la materia viva y Boltzmann ha demostrado que para que fallase esta ley en un decilitro de gas, sería preciso esperar un número de siglos igual a la unidad seguida de 10.000 millones de ceros.

(13) Ejemplo: la autorregulación de la temperatura en los animales de sangre caliente.

(14) Las colonias de corales, por ejemplo, en las que se puede observar, además, una evolución geométrica curiosa: los corales prehistóricos de sección cuadrada (*tetracoralla*) están completamente extinguidos y han sido reemplazados por los corales octogonales (*octacoralla*), luego por los corales de sección exagonal (*exacoralla*). Por el contrario los equinodermos o *estrellas de mar*, que ignoran la compresión de los fanlerios coloniales, han evolucionado hacia formas cada vez más rigurosamente pentámeras. La misma observación cabe hacer para los ursinos y los crinoides.

nicos aumentan por aglutinación (adición de elementos idénticos); el organismo vivo crece por una especie de expansión de dentro hacia fuera a la cual se ha dado el nombre de *intususcepción*⁽¹⁵⁾.

También existe la diferencia radical siguiente: en la materia inorgánica, los elementos moleculares, una vez en equilibrio (rígido u oscilante) permanecen prácticamente idénticos mientras dura el proceso de agrupación, en tanto que los elementos constitutivos del tejido vivo se renuevan continuamente por combustión y eliminación, como la personalidad de los filósofos taoístas⁽¹⁶⁾. El organismo vivo, aparte de ciertas formas primitivas todavía

(15) La única obra que conozco que haya estudiado las leyes del crecimiento desde el punto de vista matemático es el tratado titulado *Growth and Form* (Crecimiento y Forma) de D'Arcy Thompson, publicado por la Universidad de Cambridge. He aquí algunos extractos:

"Los cuerpos inorgánicos (cristales) crecen por *aglutinación*: un cristal crece por la adición de nuevas moléculas que, una a una y capa a capa, se yuxtaponen progresivamente al sustrato sólido ya formado. Cada partícula parece estar influenciada solamente por las partículas próximas; cada una de las cuales, al agregarse, toma su posición en el conjunto de sus vecinas inmediatas, generalmente en los huecos y rincones disponibles, y de manera que entre en contacto con el mayor número posible de partículas limítrofes. Cada partícula se fijará en el lugar que pueda alcanzar más cómodamente; si no hay hueco disponible tomará la posición de energía potencial mínima con respecto a sus vecinas ya reunidas, quedando entonces la energía del sistema distribuida en forma que no quede ninguna fuerza resultante que pueda causar un desplazamiento, lo que conduce a la formación de caras planas, porque en una disposición cristalina homogénea, las leyes de la simetría exigen que el lugar geométrico de una propiedad sea un plano o un grupo de planos, siendo el lugar geométrico en este caso particular el de la energía superficial mínima. El conjunto de pilas de balas o de granos esféricos, que nos permite imitar o repetir las disposiciones cristalinas, nos demuestra en forma visible que el resultado es siempre la producción, como en el cristal natural, de superficies planas y de ángulos netos simétricamente dispuestos. Los cuerpos orgánicos, por el contrario, crecen por *intususcepción o imbibición*, como un trozo de gelatina puede aumentar en el agua por la penetración en el líquido de toda su sustancia, inflándose la masa gelatinosa del mismo modo que un globo que se llena de aire. De aquí resultan a menudo formas esféricas similares a las burbujas de aire, dándose la energía total de superficie mínima con una superficie esférica". Observemos una vez más la importancia de la ley de la energía de superficie mínima, aún en las configuraciones inestables y complejas de la materia viva.

Citemos también a H. Guilleminot (op. cit.): "La unidad cristalina formada no es más que una colectividad de pequeñas unidades, todas semejantes y llevando en sí mismas los elementos de simetría del conjunto, es decir, los factores orientadores de la forma general. Por el contrario, las unidades vivas tienen formas que no son únicamente el resultado de las propiedades morfológicas de los elementos constitutivos y que tampoco se justifican totalmente por las relaciones de la individualidad con su medio. Estas formas parecen proceder de una directiva interior y propicia al agregado, para la mejor realización de una función".

(16) Véase en H. Guilleminot (op. cit.) la comparación de los organismos vivos con los *sistemas estacionarios* en equilibrio morfológico como el chorro de agua o la llama.

próximas a una simetría esférica, tiene, además, la particularidad de ofrecer, en general, un sólo plano de simetría (en la dirección de su movimiento) y de ser notablemente asimétrica con respecto al plano perpendicular en el punto medio de su sección por el anterior, y el ser vivo crece conservando las líneas generales de su forma. Como dice D'Arcy Thompson (17):

"La concha (18) retiene su forma inmutable, a pesar de su crecimiento asimétrico y, lo mismo que los cuernos de los animales, crece sólo por una extremidad. Esta notable propiedad de aumentar por crecimiento terminal sin modificación de la forma de la figura total, es característica de la espiral logarítmica y no la tiene ninguna otra curva matemática".

D'Arcy Thompson recuerda en seguida el concepto geométrico del *gnomon*, debido a Aristóteles: Un gnomon es toda figura cuya yuxtaposición a una figura dada produce una figura resultante semejante a la figura inicial. Por ejemplo, las porciones sombreadas de la figura 50 son los gnomones del triángulo equilátero y del cuadrado (19).

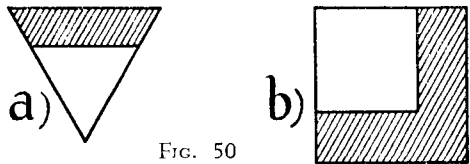


FIG. 50

(17) *Op. cit.*

(18) Esqueleto exterior del molusco que la segrega.

(19) Los griegos trasladaron también este concepto a los números. A la red triangular a) corresponde la serie de igualdades:

0 + 1	=	1	a)	
1 + 2	=	3		
3 + 3	=	6		
6 + 4	=	10		
10 + 5	=	15		
15 + 6	=	21		
21 + 7	=	28		
.....				
$n \frac{(n-1)}{2} + n$	=	$\frac{n(n+1)}{2}$		

La serie de los gnomones (1, 2, 3, ..., n) es la de los números enteros; y la sucesión 1, 3, 6, 10, 15, ..., $n \frac{(n+1)}{2}$, son los números *triangulares*.

A la red cuadrada b) corresponden las igualdades siguientes:

0 + 1	=	1 ²	b)	
1 ² + 3	=	2 ²		
2 ² + 5	=	3 ²		
3 ² + 7	=	4 ²		
4 ² + 9	=	5 ²		
5 ² + 11	=	6 ²		
6 ² + 13	=	7 ²		
.....				
$(n-1)^2 + (2n-1)$	=	n^2		

Debemos a Aristóteles un teorema fundamental sobre el gnomon. (fig. 51): En todo triángulo ABC se puede construir uno semejante y su gnomon. Basta en efecto trazar una recta BD que forme un ángulo $\hat{A}BD$ igual a \hat{BCA} para obtener un triáng. ADB semejante al ABC inicial. BCD será, por consiguiente, el gnomon de ADB.

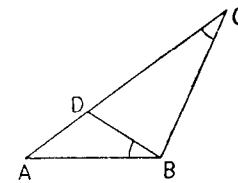


FIG. 51

Se puede repetir indefinidamente a partir de una figura dada la construcción gnomónica. He aquí tres figuras gnomónicas interesantes (fig. 52):

Figura a. — El gnomon del rectángulo de módulo $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$ es un rectángulo idéntico (a la inversa, un rectángulo de módulo $\sqrt{2}$ se puede dividir en dos rectángulos iguales que tengan también $\sqrt{2}$ como módulo).

Figura b. — El gnomon del rectángulo de módulo $\frac{DE}{DF} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ es un cuadrado perfecto. En el capítulo siguiente, veremos la importancia que tiene esta propiedad.

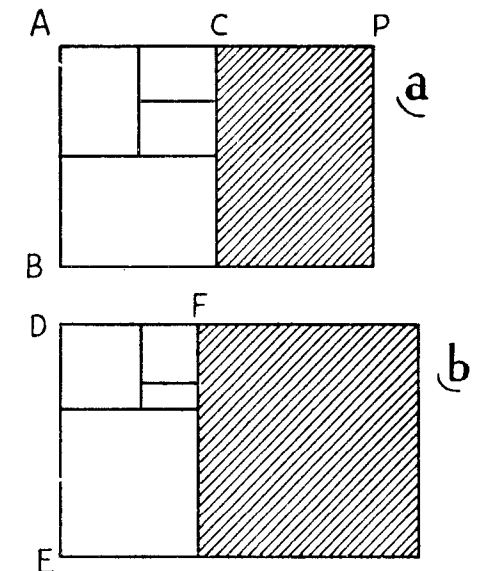


FIG. 52

La serie de los gnomones es en este caso la de los números impares y los números 1, 2², 3², ..., n² (que corresponden a la vez a las redes de puntos y a las superficies de las figuras crecientes) son los números *cuadrados*. La teoría del crecimiento gnomónico es un aspecto geométrico de la teoría moderna de las *diferencias finitas*. Los conceptos de números poligonales (de los cuales son casos particulares los números triangulares y cuadrados) y polidricos y el método de los gnomones habían permitido a los griegos explorar el aspecto *diofántico* de la Geometría que nosotros hemos

Figura c. — El gnomon del triángulo *sublime* ABC (triángulo isósceles de ángulo en el vértice igual a 36° , en el que el lado igual y la base están en la razón Φ) es un triángulo isósceles cuyo ángulo en el vértice es igual a 108° (es el triángulo que se separa del pentágono regular mediante una diagonal).

D'Arcy Thompson observa que si se continúan indefinidamente estas construcciones de adición (o sustracción, si se opera en el interior) gnomónica, los puntos correspondientes, (por ejemplo, todos los vértices de los triángulos sublimes de la figura c) de las diferentes figuras semejantes están situados en una espiral logarítmica. Recíprocamente, "toda curva plana que parte de un polo fijo, de tal modo que el área de un sector sea siempre un gnomon para el área precedentemente obtenida, es una espiral logarítmica" (fig. 53, a, b).

O pasando al crecimiento de los volúmenes: "Si una estructura creciente está compuesta de partes sucesivas homotéticas (semejantes) y semejantemente dispuestas, podemos siempre trazar por los puntos correspondientes una serie de espirales logarítmicas ⁽²⁰⁾ y cada aumento sucesivo es un gnomon de la estructura precedente".

De aquí resulta, recíprocamente, que en el perfil en espiral logarítmica de la concha o del cuerno (ejemplos biológicos de crecimiento homotético) podemos inscribir siempre una variedad sin fin de otras figuras gnomónicas. D'Arcy Thompson cita como ejemplo impresionante de crecimiento gnomónico la bella concha del *Haliotis splendens*, el *Abalone Shell* de California

descuidado y que fácilmente puede ampliarse a la Geometría de 4 y de n dimensiones. (Véase en el capítulo II la nota relativa al triángulo de Pascal, y también el anexo).

⁽²⁰⁾ He aquí un resumen de las propiedades algebraicas y geométricas de la espiral logarítmica o *Spira Mirabilis* de Bernouilli: Si una recta (radio vector) está animada de una velocidad angular uniforme en torno a uno de sus puntos (polo), un punto que se mueva sobre esta recta con una velocidad proporcional a su distancia al polo describe una espiral logarítmica, cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho = a\theta$.

En efecto, de la definición de la curva resulta $\frac{d\rho}{dt} = b \cdot \rho$, $\theta = ct$; de donde

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{b}{c} \cdot d\theta, \log. \rho = \frac{b}{c} \theta; \theta = K \log. \rho \text{ o sea } \rho = a^\theta.$$

El radio crece en progresión geométrica cuando el ángulo crece en progresión arit-

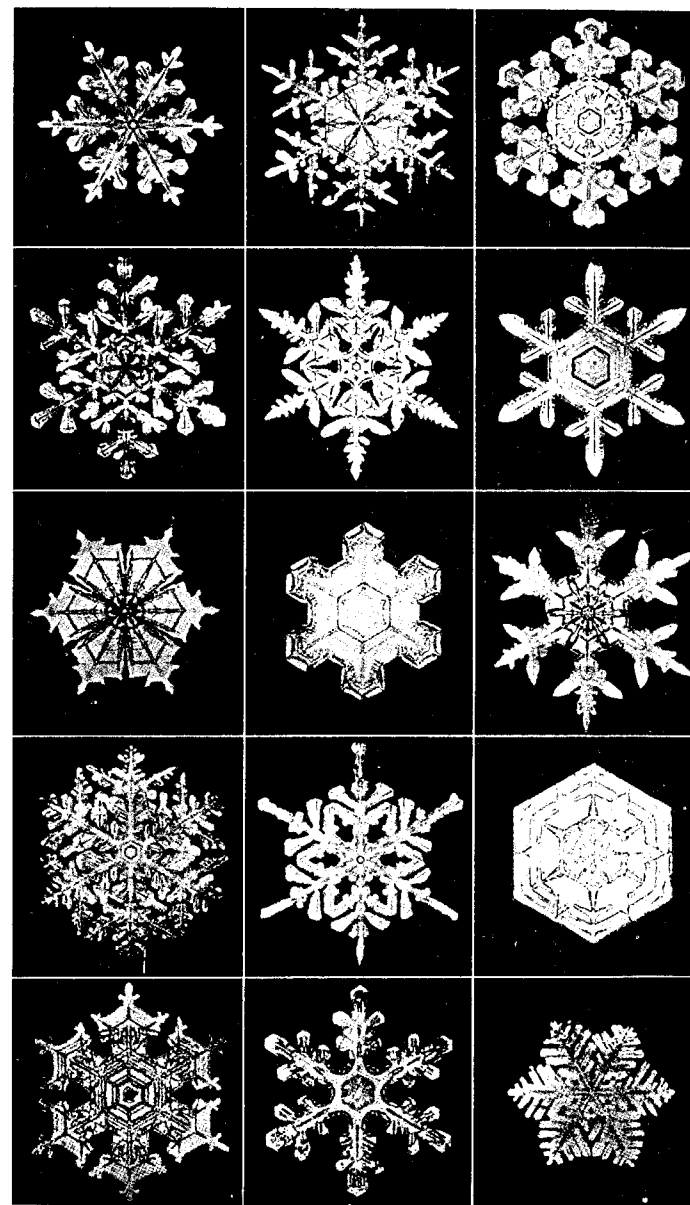


LÁMINA 29. Cristales de nieve.

cuyas espirales logarítmicas generatrices determinan superficies gnomónicas encorvadas (fig. 55 y lám. 30, arriba).

La espiral logarítmica es la única curva plana cuyos segmentos son homotéticos (semejantes) (21). Tiene, pues, la propiedad de homotecia continua, y es (como lo había presentado Church) el símbolo matemático más impresionante de la relación entre forma y crecimiento.

Se emplea a veces como símbolo matemático del crecimiento continuo la curva exponencial $y = e^x$ o espiral levantada, o la curva sinusoidal de oscilaciones amortiguadas según una ley igualmente exponencial. La espiral de Arquímedes, por el contrario, que se emplea en ciertos diagramas crista-

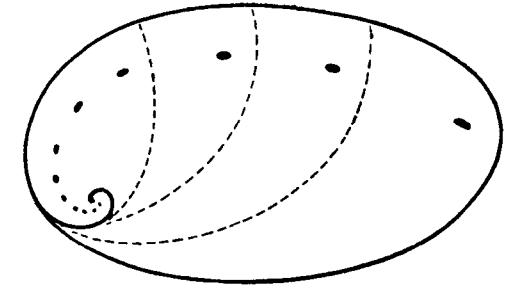


FIG. 55

mética; (o : los radios vectores de los puntos cuyos ángulos vectores están en progresión aritmética, están en geométrica). Salvo un factor constante, los ángulos vectores son, pues, los logaritmos de los radios correspondientes, de donde resulta que cuando tres radios vectores están separados por ángulos iguales (por ejemplo 90° ó 360°) el radio intermedio es media proporcional entre los radios extremos; cuando estos ángulos iguales son de 90° el punto intermedio se encuentra siempre sobre la semicircunferencia que tiene como diámetro la recta que une los otros dos puntos y pasa por el polo.

El radio vector forma también en toda espiral logarítmica un ángulo constante (el ángulo característico α) con la curva. Descartes descubrió otra propiedad importante: Si B y C son dos puntos de una espiral logarítmica, las distancias del polo O a B y a C son proporcionales a los radios OB y OC ; el crecimiento en la dirección de la curva y el crecimiento en la dirección del radio vector están en una razón constante. Se tiene $\frac{dp}{ds} = \cos \alpha$ y S (longitud del arco de curva desde O al punto considerado) = $n\rho$, siendo $n = \sec \alpha$, de donde sale la ecuación de la curva en función de α , $\rho = me^{\theta \cot \alpha}$.

Se tiene también (fig. 54b): arco de la curva desde O a $B = BI$. Desde el punto de vista puramente analítico, la espiral logarítmica posee la notable propiedad de ser su propia evoluta, involuta, podaria, cáustica, y además, de reproducirse si se arrolla sobre sí misma. Si una curva cualquiera se arrolla sobre sí misma, y se repite esta operación indefinidamente,

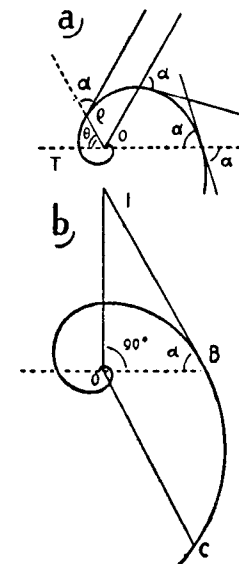


FIG. 54

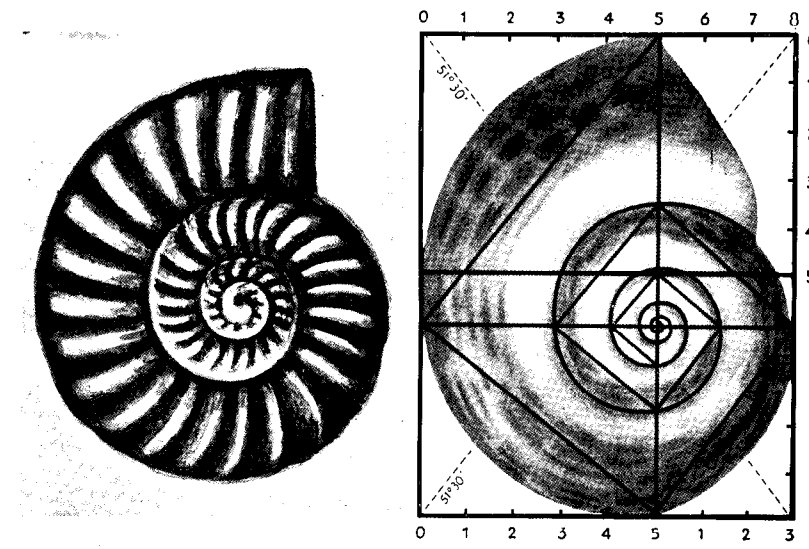


LÁMINA 31. Arriba: Amonita. Abajo: Dolium Perdix.

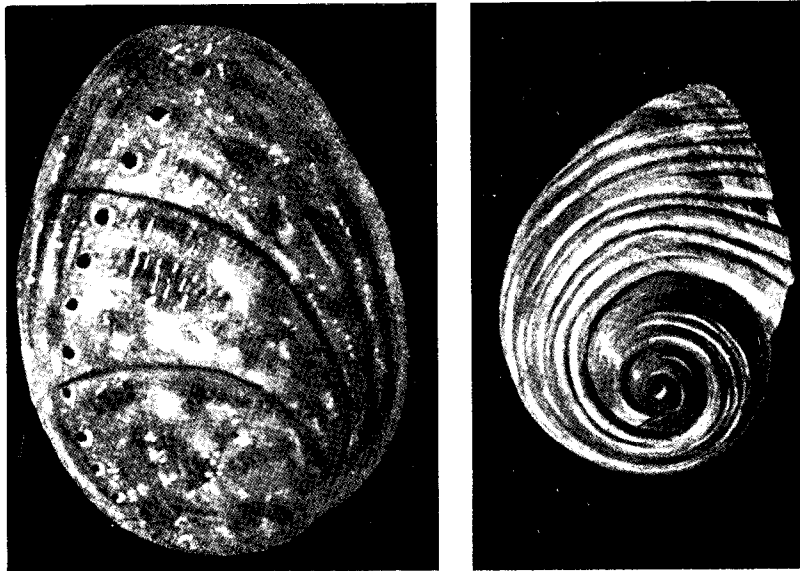


LÁMINA 30. Arriba: Haliotis Splendens. Abajo: Dolium Galea.

lográficos, no aparece en Botánica ni en los diagramas de crecimiento: es una curva puramente estática que simboliza, al menos, un movimiento uniforme, a la inversa de la espiral logarítmica y de las demás curvas exponenciales ⁽²²⁾.

Ya hemos visto en el capítulo II que toda espiral logarítmica, esquema de crecimiento, puede a su vez ser esquematizada, caracterizada, por una progresión geométrica, y como lo ha hecho observar Sir Th. Cook, la serie: 1, Φ^1 , Φ^2 , Φ^3 , ... Φ^n , tiene, entre los esquemas numéricos del crecimiento, la propiedad de ser una progresión a la vez geométrica y aditiva, que permite obtener el crecimiento homotético de carácter exponencial por medio de adiciones de elementos simples. Un *esquema* todavía más natural (pero solamente aproximado) es el reflejo diofántico (en números enteros) de la serie

resulta como curva límite envolvente una espiral logarítmica. Desde el punto de vista morfológico, citemos de nuevo las dos propiedades cuya importancia biológica destacó D'Arcy Thompson: 1ª la espiral logarítmica es (en dos dimensiones) la única curva cuyos arcos son siempre semejantes, es decir, cambian de dimensiones, pero no de forma: propiedad homotética en el crecimiento; 2ª, esta propiedad se extiende a las áreas determinadas por los vectores. Toda curva plana nacida de un polo en forma tal que el área vectorial de un sector sea siempre un gnomon para la totalidad de la figura precedente, es una espiral logarítmica: propiedad de *crecimiento gnomónico*. Observemos que la recta y la circunferencia son casos límites de la espiral logarítmica, para $\alpha = 0$ y $\alpha = 90^\circ$.

⁽²¹⁾ Las porciones de una misma circunferencia y de una recta cualquiera son no solamente semejantes, sino superponibles; los arcos de dos circunferencias de radios distintos son semejantes, pero no superponibles (en el espacio, la hélice tiene la propiedad análoga a la recta para la translación y del círculo para la rotación, de ser superponible a sí misma por *atornillamiento*).

⁽²²⁾ La espiral de Arquímedes $\rho = \alpha \cdot \theta$, está descrita por un punto animado de un movimiento de translación uniforme (de O hacia X) sobre un vector OX que tiene una velocidad angular uniforme alrededor del polo O. Los radios son normales en todo punto de la curva y la distancia radial entre dos espiras consecutivas es constante.

En la espiral logarítmica, $\rho = a^\theta$, estos intervalos radiales crecen en progresión geométrica (por la misma razón que la *pulsación radial* de la curva). Se podría considerar la espiral de Arquímedes como sección meridiana del volumen de un cilindro flexible, como un cable, y la espiral logarítmica, como meridiana del volumen obtenido al desarrollar del mismo modo un cono en *caracol* (fig. 56).

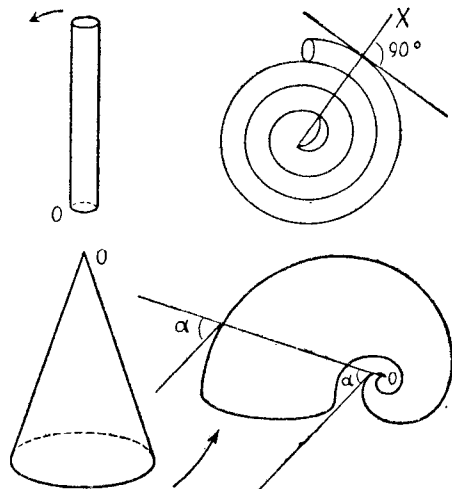


FIG. 56

Φ representada por la sucesión de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... (sucesión F), en la cual (como en *toda* serie aditiva de dos tiempos) la razón de dos términos consecutivos tiende rápidamente hacia Φ . Esta notable propiedad (posibilidad de realizar un crecimiento homotético por simple adición) nos permite explicar la preeminencia en Botánica de esta sucesión y de la fraccionaria derivada de ella:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \dots \quad (23),$$

así como la presencia de estos términos en las proporciones del cuerpo humano ⁽²⁴⁾; da también una de las razones del predominio de la simetría pentagonal (íntimamente emparentada con la sección áurea y, por consiguiente, con la sucesión de Fibonacci) en tantas formas vivas. (Las láminas 32 y 33 reproducen cierto número de estas formas pentámeras orgánicas).

Ya habíamos observado (cap. II), desde el punto de vista puramente estético, la armonía resultante de la recurrencia rítmica de formas semejantes. La explicación de Timerding (a propósito del rectángulo Φ): "la impresión de seguridad que da lo que es igual a sí mismo en la diversidad de la evolución" evoca no sólo el crecimiento homotético del individuo, sino también el ciclo inmemorial de ritmo más complejo o ley biogenética de recapitulación de Haeckel (la ontogenia comprende a la filogenia).

⁽²³⁾ Recordemos que estos términos fraccionarios de la sucesión de Fibonacci aparecen especialmente en la flor de girasol, y que se utiliza, por ejemplo, $\frac{89}{144}$ para designar determinada cantidad de semilla de gran rendimiento.

La razón $\frac{21}{34}$ caracteriza la disposición de las semillas en la margarita, $\frac{5}{8}$ aparece en la mayor parte de las piñas, etc.

Hemos visto una razón adicional para la presencia de los términos de la sucesión fraccionaria de Fibonacci en Botánica, en la solución (aproximada) que da para la distribución óptima de las hojas bajo la luz cuya solución rigurosa está dada por el ángulo ideal $\frac{360^\circ}{\Phi^2}$.

⁽²⁴⁾ El hecho de que un gran número de mediciones hechas en individuos de uno y otro sexo, dé Φ como valor medio de la razón $\frac{h}{n}$ examinada en el capítulo II, deriva de la manera *oscilante* cuya razón $\Phi = 1,618$ es la de los términos de la serie

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots$$

porque se tiene, en efecto:

$$\frac{13}{8} = 1,625; \frac{21}{13} = 1,615; \frac{34}{21} = 1,619, \text{ etc.}$$

Las espirales logarítmicas que recuerdan la razón Φ en su pulsación radial, diametral o cuadrantal, pueden evocar un crecimiento homotético armonioso, lo que nos invita a considerar tres espirales diferentes:

1º La pulsación radial de la primera (fig. 57) es

$$P_r = \frac{OC}{OB} = \frac{CD}{BC} = \Phi,$$

su pulsación diametral ⁽²⁵⁾ es

$$P_a = \frac{OB}{OB'} = \sqrt{\Phi}$$

y su pulsación cuadrantal

$$P_q = \frac{OB}{OB''} = \sqrt[4]{\Phi} = \frac{DD''}{D'D''}$$

El rectángulo director inscrito en una evoluta de espiral ⁽²⁶⁾ determinada por tres puntos situados en los extremos de tres radios que forman entre sí ángulos de 90º tiene como mó-

dulo la pulsación cuadrantal $\sqrt[4]{\Phi}$ (por ejemplo en la figura el rectángulo inscrito $D'D''DM$).

⁽²⁵⁾ Se tiene siempre en una misma espiral logarítmica:

$$P_r = (P_a)^2, P_a = (P_q)^2$$

y recíprocamente

$$P_a = \sqrt{P_r},$$

$$P_q = \sqrt{P_a} = \sqrt[4]{P_r}$$

Más generalmente, en una espiral logarítmica de pulsación radial $P_r = m$ corresponde, para una separación angular $BOA = \frac{360^\circ}{n}$ una razón $\frac{OB}{OA} = \sqrt[n]{m}$ entre las longitudes de los radios separados por este ángulo (fig. 58).

⁽²⁶⁾ El módulo (razón entre el lado mayor y el menor) del rectángulo director así definido basta para caracterizar una espiral logarítmica, tan bien como la pulsación radial o cuadrantal o el ángulo característico α . Se obtiene un rectángulo del mismo módulo (igual a la pulsación cuadrantal de la espiral) trazando las tangentes a la curva

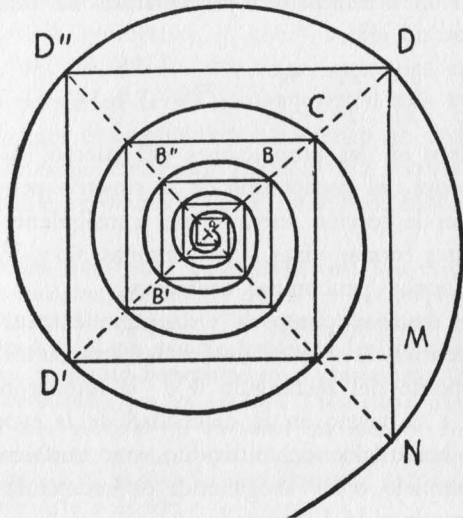


FIG. 57

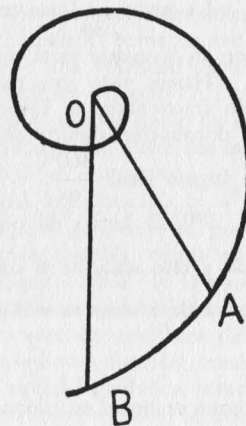


FIG. 58

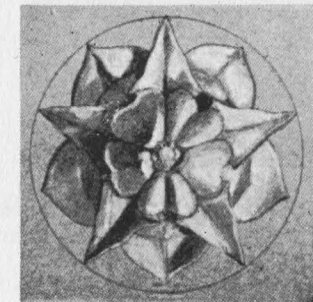
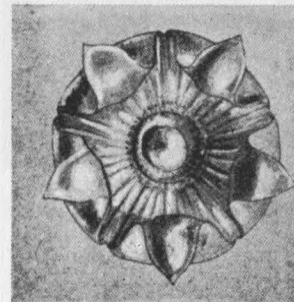
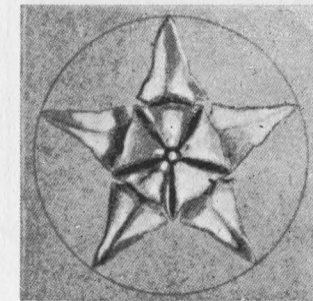
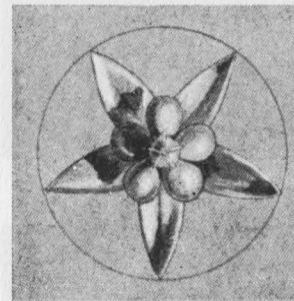
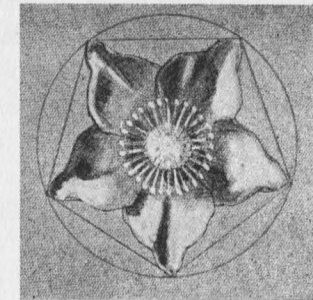
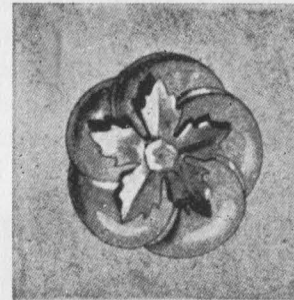


LÁMINA 32. Formas pentámeras orgánicas (Flores).

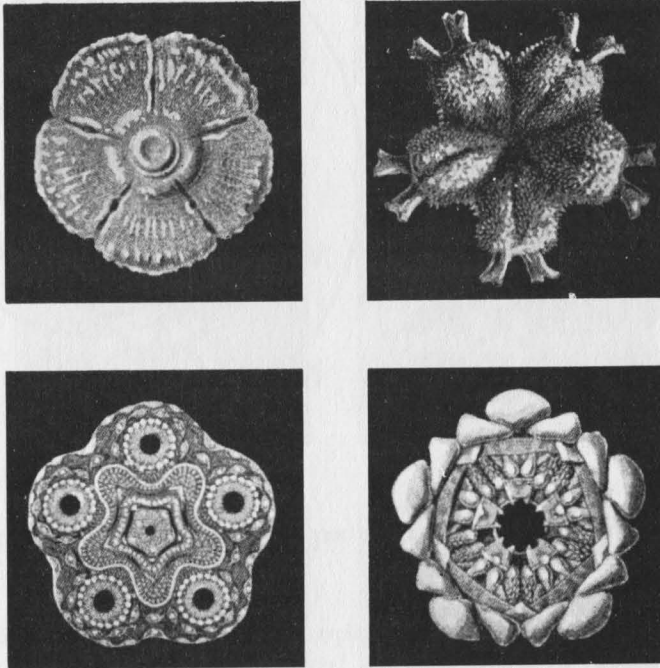


LÁMINA 33. Formas pentámeras orgánicas. (Organismos marinos).

Los intervalos definidos sobre un mismo radio por las espiras consecutivas formarán una progresión Φ , y se tendrá, en particular, para tres intervalos consecutivos $CD = AB + BC$, lo que, como observa Sir Th. Cook, hace que esta espiral sea muy fácil de construir. Se la encuentra como trazado directivo en las evolutas de muchos capiteles jónicos. Las conchas del *Murex*, del *Fusus antiquus* (fósil), *Facelaria*, *Scalaria pretiosa*, *Solarium trochleare*, etc., y de muchas amonitas fósiles (en particular *A. Intuslabiatus* lámina 31 arriba), tienen igualmente esta espiral como diagrama de crecimiento. Su ángulo característico (ángulo de la tangente en un punto cualquiera con el radio vector de este punto) es de $85^{\circ}36'$.

2° La espiral de la figura 59 tiene $\frac{OD}{OD'} = \Phi$ como pulsación diametral, $\frac{OD}{OB} = \Phi^2$ como pulsación radial y $\frac{OD}{OD''} = \sqrt{\Phi}$ como pulsación cuadrantal y módulo de su rectángulo director $\frac{DD''}{D'D''}$. Suministra el trazado directivo de la hermosísima concha del *Dolium Perdix* (lámina 31, abajo). Su ángulo característico es $81^{\circ}22'$.

3° Por último, tenemos (fig. 60) una espiral de pulsación cuadrantal $\frac{OD}{OD''} = \Phi$, pulsación diametral $\frac{OD}{OD'} = \Phi^2$, y pulsación radial $\frac{OD}{OB} = \Phi^4$. Su ángulo característico es de $73^{\circ}43'$.

Tiene como rectángulo director el rectángulo de módulo $\Phi = \frac{DD''}{D'D''}$ y representa, pues, como curva de crecimiento la que corresponde a los gnomones cuadrados y a la serie Φ (el pequeño escalope de mar o *Haliotis parvus*

en los cuatro puntos situados en los extremos de los dos diámetros perpendiculares (como los puntos D' , D , D'' , N , en las figuras 57, 59 y 60). Esta construcción da el rectángulo circunscrito en una evoluta de espiral.

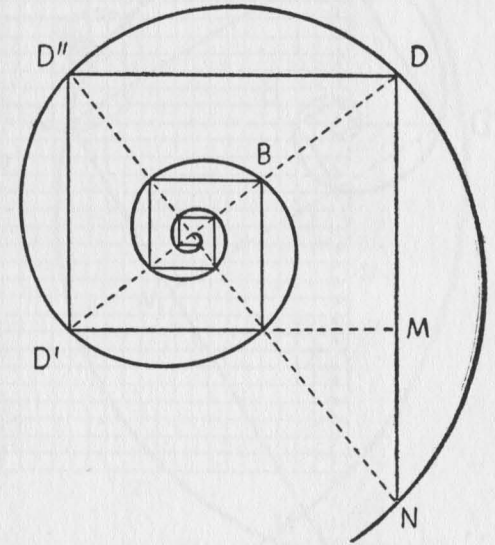


FIG. 59

tiene una espiral directiva de pulsación radial 6, que difiere muy poco de este tercer caso de pulsación radial $\Phi^4 = 6,85\dots$). Si entre estas tres espirales en las que interviene la razón Φ , hubiera una que pudiese reclamar el título de *curva del crecimiento armonioso* con preferencia a las otras dos, ésta parecería ser aquélla (la última) y no, como sugería Sir Th. Cook, la espiral de pulsación radial Φ de la figura 57.

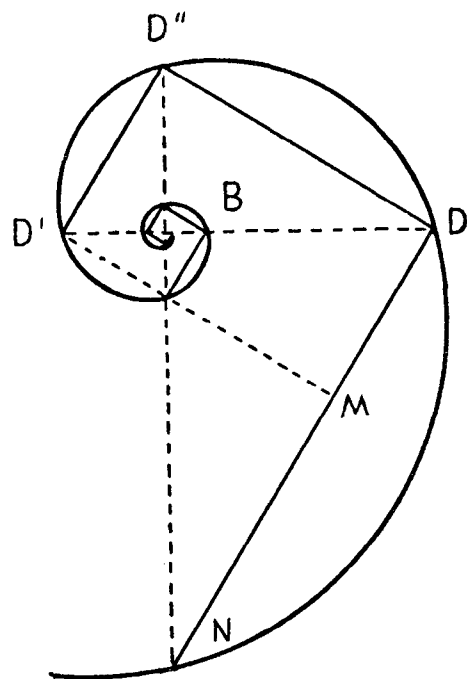


FIG. 60

drado tomado como célula unidad), 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, ..., es decir, $1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 8^2, 13^2, 21^2, \dots$, que son los cuadrados de los términos sucesivos de la serie de Fibonacci: la razón de las áreas de dos pseudognomones consecutivos tiende, pues, hacia Φ^2 (27).

La curva obtenida al enlazar sobre este diagrama los arcos de espiral que pasan por los vértices sucesivos tiende a confundirse con la espiral loga-

(27) En virtud de la propiedad $u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+1}$ mencionada en el capítulo II de los términos de la serie de Fibonacci, y derivando de su definición algebraica:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad u_1 = u_2 = 1,$$

las sumas de las áreas de dos pseudo-gnomones consecutivos da la serie 2, 5, 13, 34, 89, ..., obtenida al no tomar más que un término de cada dos de la de Fibonacci, y en la cual la razón de dos términos consecutivos tiende también hacia Φ^2 .

Doy en la lámina 34 un interesante diagrama de crecimiento basado en la sucesión de Fibonacci y en el cual los lados de los pseudognomones cuadrados sucesivos son precisamente los términos de esta sucesión. Los módulos de los rectángulos crecientes así obtenidos son, por consiguiente, los elementos de la sucesión fraccionaria de Fibonacci:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$$

es decir, que tienden rápidamente a asumir la forma de un rectángulo Φ ; los pseudognomones cuadrados tienen como áreas (en función del pequeño cua-

drado tomado como célula unidad),

rítmica de pulsación cuadrantal Φ considerada en último lugar. Observemos incidentalmente que la propiedad algebraica general de las series aditivas de

dos términos consecutivos tiende hacia Φ , cualesquiera que sean los dos primeros términos, se encuentra geoméricamente en estos diagramas de crecimiento, partiendo de cualquier rectángulo inicial (incluso un rectángulo infinitamente estrecho formado por un simple segmento de recta) y yuxtaponiendo indefinidamente un cuadrado sobre el lado mayor de los rectángulos progresivamente obtenidos, resulta un rectángulo creciente cuyo módulo tiende muy rápidamente hacia Φ (fig. 61).

Es una razón más para explicar la ubicuidad en la naturaleza viva de aproximaciones más o menos rigurosas de la razón Φ apareadas a contornos espirales asimétricos, a formas simétricas pentagonales o derivadas del pentágono. La lámina 35 representa tres espirales o pseudoespirales de construcción muy sencilla, y se tiene en ella:

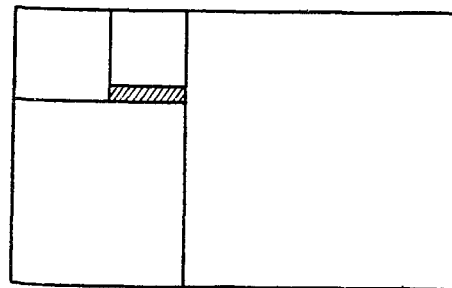


FIG. 61

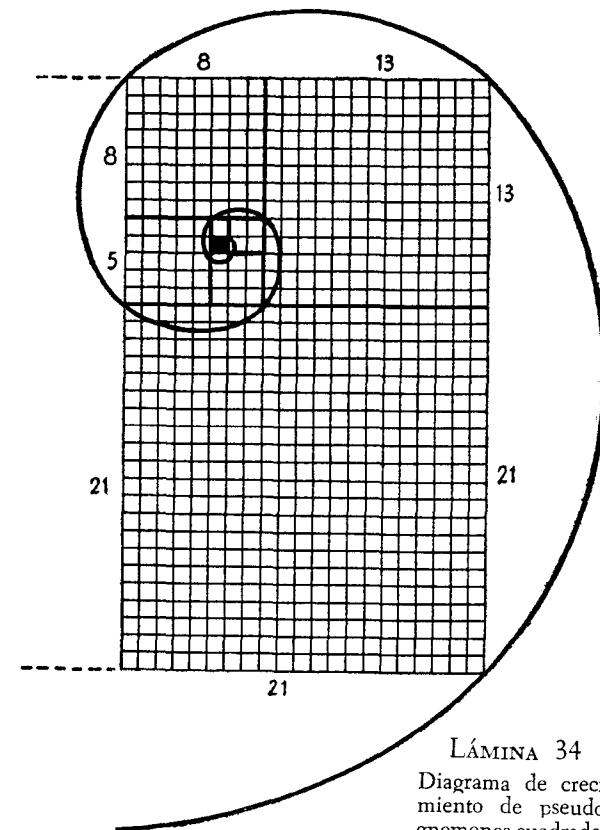


LÁMINA 34

Diagrama de crecimiento de pseudognomones cuadrados

Figura 1. — La espiral de pulsación radial 4, pulsación diametral 2, pulsación cuadrantal (y módulo del rectángulo directivo) $\sqrt{2}$. Es muy fácil de construir empíricamente por medio del

compás y corresponde al crecimiento gnomónico por rectángulos en $\sqrt{2}$ mencionado más arriba (véase figura 52a).

Figura 2. — La pseudoespiral señalada por Viollet-le-Duc en el álbum de Villard d'Honnecourt (volveremos a encontrarla en el capítulo VIII a

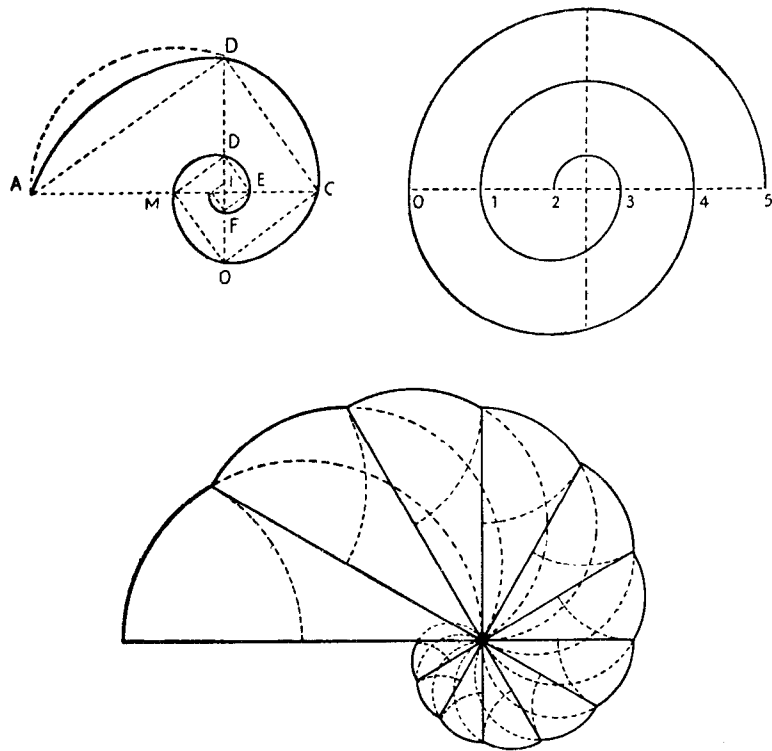


LÁMINA 35

Tres espirales de construcción sencilla

propósito de ciertos trazados de ojivas). Se aproxima más bien a una espiral de Arquímedes (de anillos de espesor constante) que a las espirales logarítmicas de que nos ocupamos.

Figura 3. — Pseudoespiral anillada cuya construcción, muy sencilla, es la traducción geométrica de la fórmula recurrente:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 - \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2}$$

Su pulsación radial es $\left(\frac{4^3}{3^3}\right)^2$, es decir, aproximadamente 5,62. Se acerca, pues, al perfil de la *Haliotis parvus* cuya pulsación radial es 6.

La espiral logarítmica confiere también a los crecimientos gnomónicos de los que es perfil y símbolo, la elasticidad y la facultad de indeterminación progresiva cuya importancia en la evolución del impulso vital demostró Bergson. Parecería que, desde este punto de vista, las espirales de ángulo característico muy grande, cuya forma se aproxima, por consiguiente, a la espiral estática de Arquímedes (en la cual los radios vectores forman con las tangentes a la curva ángulos de 90°) y cuyas evolutas definen anillos bastante próximos, ceden poco a poco el puesto a espirales más elásticas cuyo ángulo característico se aleja de 90°. Una inmensa porción de la corteza terrestre está formada (28) por conchas microscópicas de numulitas, que eran protozoarios coloniales (familia de los foraminíferos) *espirodiscoides* cuya espiral meridiana es casi una espiral de Arquímedes (el ángulo característico variaba entre 89°8 y 90°). Las numulitas están ya casi extinguidas como organismos vivos. De igual modo, la innumerable tribu de las amonitas (cuyo ángulo característico variaba de 85° a 86° y de las cuales ciertos ejemplares alcanzan tan grandes dimensiones) ha dejado su lugar después de largo tiempo a conchas de espiral más abierta, por ejemplo, al clan omnipresente de las *Haliotides* (vulgo escalope de mar) entre los cuales la victoriosa *Haliotis splendens*, antes citada, presenta un tan perfecto ejemplo de crecimiento gnomónico. La directriz de esta última concha es una espiral logarítmica de ángulo característico de 60° y de pulsación radial 41. La vida que se conjuga con estos perfiles para evitar los fondos de saco biológicos, inserta, por lo demás, la espiral y la asimetría misma en lo infinitamente pequeño. Mientras que la reconstitución sintética *in vitro* de ciertos productos de la Química orgánica

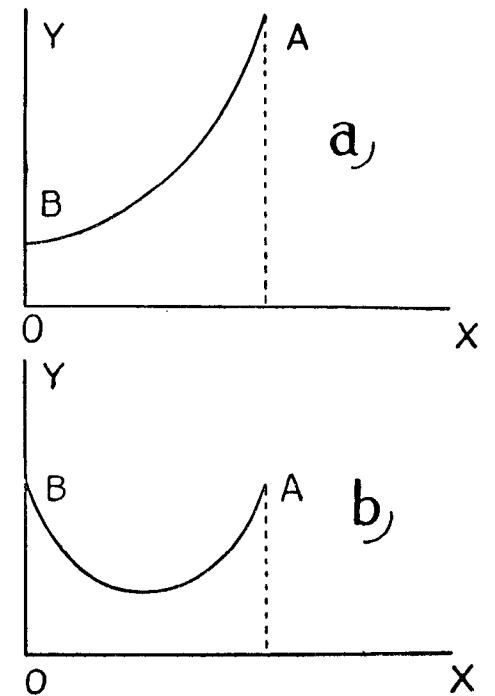


Fig. 62

(28) Ver Kirkpatrick, *The Nummulosphere*, Londres (Lamley, editor).

da siempre sustancias *neutras* desde el punto de vista polarimétrico, las sustancias directamente producidas por la materia viva y sus agentes líticos son siempre ópticamente activos, es decir, de constitución íntima disimétrica (predominio de un isómetro sobre otro) ⁽²⁹⁾.

Entre las funciones matemáticas que se encuentran en el perfil de los organismos vivos, citemos también la catenaria. Es, empíricamente, la curva que forma un hilo pesado inextensible entre dos puntos de suspensión (figura 62 a y b). Su ecuación es:

$$y = \frac{c}{2} \cdot \left(e^{\frac{x+b}{c}} + e^{-\frac{x+b}{c}} \right)$$

Es a la vez una curva *estática*, que a menudo resulta de estados de equilibrio sometidos al principio de Hamilton (siendo la catenaria, entre las curvas de la misma longitud, aquella cuyo centro de gravedad es el más bajo posible), y la curva meridiana de ciertas formas biológicas. D'Arcy Thompson observa, en efecto, (*op. cit.*) que la catenaria es igualmente aquella curva capaz de engendrar, por su revolución en torno a un eje dado, una superficie que sea un mínimo. Se encuentra especialmente en el perfil del huevo; las meridianas de dos cáscaras (una obtusa y otra aguda) de un huevo cualquiera son catenarias de longitud diferente. Las formas del huevo oscilan entre dos tipos extremos, una inscrita en un rectángulo de módulo Φ (fig. 63a); el otro en el rectángulo de módulo $\sqrt{\Phi}$ que ya hemos observado a propósito de la espiral logarítmica de pulsación cuadrantal $\sqrt{\Phi}$ (fig. 63b). El círculo de hinchazón máxima del huevo se encuentra más cerca del casquete aplastado y determina una razón Φ o próxima a Φ , sobre el eje de simetría ⁽³⁰⁾.

Los lectores de la obra de Sir Th. Cook (*The Curves of Life*) encontrarán en ella una teoría muy sutil del encanto estético de las formas vivas y

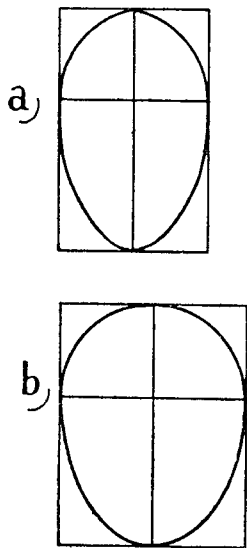


FIG. 63

⁽²⁹⁾ H. Guilleminot (*op. cit.*) hace notar que en la fabricación sintética de estos productos, los isómeros derecho e izquierdo se forman en igual cantidad porque ambos equivalen termodinámicamente y son tan *probables* uno como otro. Por el contrario, los agentes líticos de la reacción viva (diastasas, toxinas, enzimas) ejercen con su presencia una *opción vital* yuxtapuesta al encadenamiento de los fenómenos previstos por la segunda ley de la energética. Pueden destruir más rápidamente el isómero izquierdo que el derecho de una sustancia, aunque haya equivalencia dinámica para las dos destrucciones.

⁽³⁰⁾ El ornamento de arquitectura llamado *óvalo* deriva de la forma del huevo y

de las creaciones del arte. Después de haber admitido el carácter rigurosamente matemático de las leyes teóricas del crecimiento, hace observar que, en general, las curvas de las formas naturales denuncian ligeras oscilaciones o desviaciones con respecto a sus modelos teóricos, y que son justamente estas desviaciones, estos tanteos más o menos perceptibles, los que forman la característica de la vida y la causa del encanto de las curvas, de las superficies y de los volúmenes en los cuales se encarna. Transpone esta teoría a las creaciones artísticas y concluye que también allí la belleza reside en la doble percepción contradictoria siguiente: 1º: el artista ha establecido un plan riguroso, ha *geometrizado* como el Dios de Platón; 2º: en la ejecución se ha desviado a veces ligeramente, y estas fluctuaciones que denuncian la mano del hombre confieren justamente a la obra el encanto de que la privaría una ejecución demasiado rigurosa y mecánica ⁽³¹⁾. La frecuente presencia en la Naturaleza de los términos de la sucesión fraccionaria de Fibonacci, con preferencia a la razón Φ ideal, hace esta teoría muy sostenible. Tal vez Sir Th. Cook generaliza demasiado su observación cuando parece identificar los conceptos de ejecución rigurosa y de ejecución mecánica con el sacabocados. El Partenón, por ejemplo, está —como lo observa Le Corbusier ⁽³²⁾— no solamente concebido, sino ejecutado con la misma perfección de ajuste que la máquina moderna mejor calibrada, y el mármol fue tratado como nosotros tratamos el acero pulimentado al décimo de milímetro ⁽³³⁾. El tiempo se

se construye por medio del compás por un método tradicional elemental que da una excelente aproximación de la realidad (fig. 64).

Siendo AB el eje menor de la sección se traza la circunferencia de centro I y de diámetro AB; se prolongan BC y AC hasta sus intersecciones con los arcos de círculo AF (de centro B) y BE (de centro A) y se completa con el arco FME de centro C. Esta construcción da:

$$\frac{DM}{AB} = \frac{4-\sqrt{2}}{2} = 1,293 \dots, \quad \frac{DM}{IM} = \frac{4-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = 1,63 \dots$$

razones que se aproximan a los valores *ideales* $\sqrt{\Phi} = 1,272 \dots$ y $\Phi = 1,618 \dots$ correspondientes a la forma ovoide de la figura 63b.

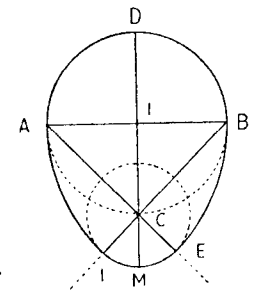


FIG. 64

⁽³¹⁾ Ruskin ya escribió: *All beautiful lines are drawn under mathematical laws organically transgressed* (Todas las líneas bellas están trazadas bajo leyes matemáticas orgánicamente transgredidas).

⁽³²⁾ *Hacia una arquitectura*, Editorial Poseidon, Barcelona.

⁽³³⁾ Por lo demás, el mismo Sir Th. Cook observa a propósito del Partenón que la no-verticalidad de las paredes y de las columnas, la hinchazón de estas últimas, la desigualdad de casi todas las dimensiones idénticas en apariencia (diámetros, separaciones de columnas, alturas de capiteles, anchuras de las metopas), son desviaciones premeditadas, sabiamente calculadas con miras a corregir las desviaciones ópticas. Estas correcciones ópticas (no descubiertas hasta 1837 en el Partenón; Miguel Angel

encarga siempre de poner su pátina, tanto en las formas como en los tintes, de las creaciones arquitecturales del hombre.

La arquitectura gótica se ha reservado mayor margen; los detalles tienen la libertad de una exuberancia vegetal y las *pequeñas desviaciones* están, como en la Naturaleza, a la orden del día. Los perfiles verticales también tienen una variedad y una flexibilidad que a primera vista parecen imitar los balbuceos del impulso vivo y alejarse completamente del purismo abstracto de la geometría dórica. Pero esta fantasía gótica, en apariencia tan floralmente caprichosa como las arquitecturas tropicales de la India, del Cambodge o de la Insulindia, revela un rigor dinámico tan acabado como la geometría y el equilibrio estático de los templos griegos.

Lo mismo que ciertos tejidos vivos pueden (por ejemplo, cuando la ley de equipartición de la energía superficial y la tendencia al mínimo de superficie, por un lado, y al mínimo de peso con el máximo de resistencia, por el otro, tienen efectos convergentes) producir configuraciones *estáticas* de simetría exagonal, lo mismo que la espiral —por lo general patrimonio de la vida— puede aparecer a veces en configuraciones en cuya constitución la vida no ha tenido parte alguna, pero donde el empuje continuo de una fuerza o de una inercia puramente mecánicas dejará huellas similares: por ejemplo, en las nebulosas espirales.

Por el contrario, la sección áurea y la simetría pentagonal que deriva de ella, son un monopolio absoluto del crecimiento vivo.

En las láminas 32 y 33 doy algunas reproducciones de formas pentámeras, cuya lista podría prolongarse indefinidamente. Entre las flores de cinco pétalos citemos al nenúfar amarillo y la flor del escaramujo (de las que derivan las simetrías más complicadas pero basadas siempre en múltiplos de 5 de los otros parientes del loto y de todo el *genus rosa*), el oxiacanto, el clavel, el geranio, la ancolía, el malvavisco, la jeringuilla, la primavera, la campánula, las flores del peral, del manzano, de la fresa, etc., etc. . . La flor de la pasión o pasionaria presenta las dos simetrías conexas: pentagonal y decagonal.

Entre los organismos marinos, las medusas, estrellas de mar, los crinoideos, ofrecen también una gran variedad de combinaciones pentagonales. Reproduzco algunas de una obra de Haeckel ⁽³⁴⁾ (lám. 33).

las había observado en los caballos de Montecavallo) desempeñan en la arquitectura griega un papel casi tan importante como el trazado principal. Fueron también empleadas por los antiguos egipcios y por los arquitectos bizantinos y góticos.

⁽³⁴⁾ *Kunstformen der Natur*. "Una característica notable del erizo de mar es la forma pentagonal de todas las pequeñas placas cuyo conjunto compone su armadura en cúpula. El erizo está, en verdad, establecido sobre un sistema pentagonal. Todo en él se encuentra dispuesto en grupos de cinco o de múltiplos de cinco. Dadle vuelta y veréis que su boca está armada de cinco dientes blancos de puntas convergentes". (*Marvels of the Universe*, Hutchinson Ed.). La figura inferior de la lámina 33 representa este

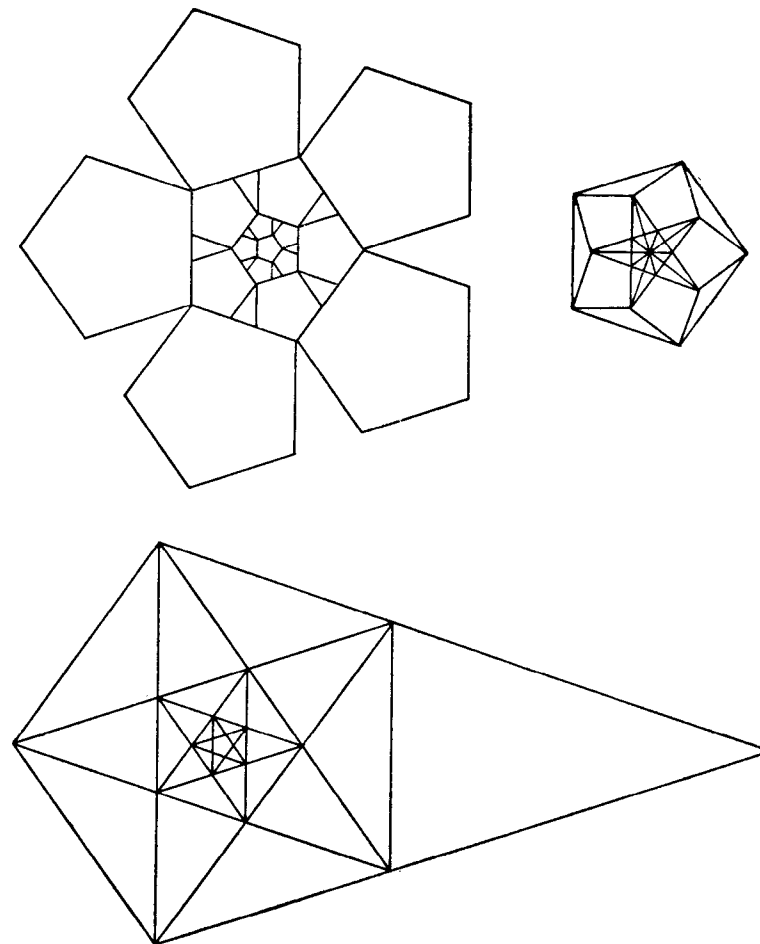


LÁMINA 37

Tres diagramas abstractos de simetría pentagonal

La morfología de los insectos proporciona por su parte (en el plano horizontal) una gran variedad de temas asimétricos simples basados sobre la serie Φ .

Una vez más, las simetrías cúbica y exagonal, aunque más raras, se encuentran también en el mundo orgánico. En la citada obra de Haeckel hay

aparato masticatorio del erizo al que los antiguos, a quienes intrigó mucho, dieron el nombre de *linterna de Aristóteles*.

ejemplos característicos de organismos marinos de simetría tetragonal, octogonal y exagonal.

Entre las flores, observemos que el lirio y el jacinto son exapétalos.

En la lámina 37 doy trazados geométricos abstractos derivados del pen-

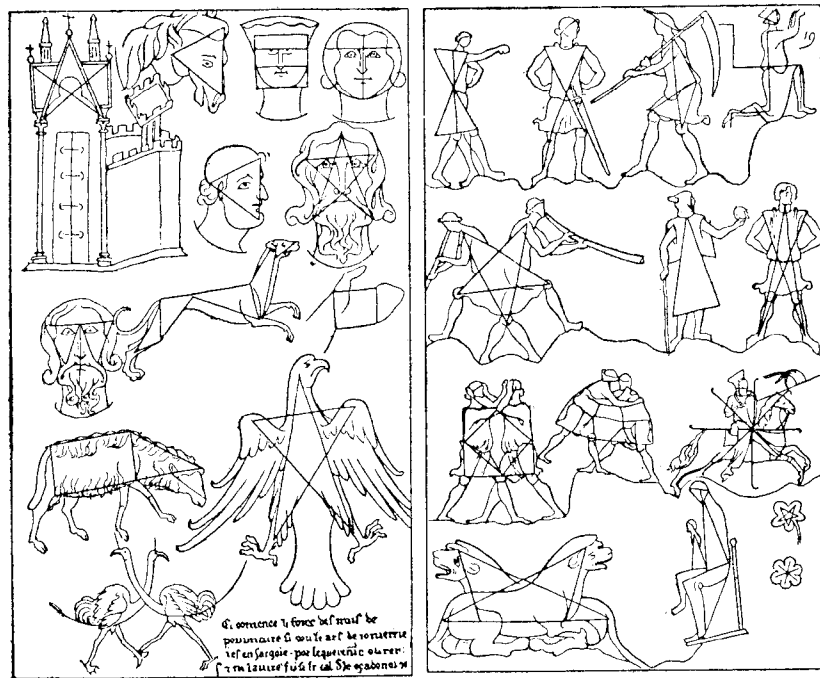


LÁMINA 39

Dos hojas del álbum de Villard d'Honnecourt

Biblioteca Nacional de París

tágono, y que, por contraste con el isotropismo estático y estandarizado de las formas exagonales introducen siempre, en cuanto se prolongan las líneas para continuar la figura, la asimetría y el crecimiento homotético según la razón Φ o las potencias de ésta. En el capítulo siguiente encontraremos de nuevo, entre los trazados góticos del tipo radial, algunas modalidades de estos diagramas.

La lámina 40 (abajo), representa el rosetón de Notre-Dame de París de que he hablado en el capítulo III y cuya simetría pentagonal evoca libremente la de las formas submarinas, como los motivos de ciertos vasos cretenses (lámina 40, arriba), como los finos rosetones giratorios que adornan en Venecia los balcones del palacio de Desdémona.

Las figuras de la lámina 39 están sacadas del famoso álbum de croquis de Villard d'Honnecourt, arquitecto francés del siglo XIII; los croquis botánicos de Leonardo da Vinci (especialmente los de la colección del Instituto de Francia) muestran a menudo, sobre sus márgenes, trazados directivos donde aparecen la mayor parte de las construcciones rigurosas encontradas en la geometría del pentágono. La *pentadactilia* (fenómeno de tener cinco dedos por mano o cinco huesos o rudimentos de huesos en los órganos correspondientes a la mano) en el hombre y muchos animales (entre otros, el esqueleto de la ballena muestra aún estos cinco huesos en la estructura de la aleta) es otro aspecto de la importancia morfológica de las formas pentagonales y del número cinco.

La mística numérica de los pitagóricos encubría, bajo un símbolo condensado, una mezcla en la cual es imposible proporcionar las partes del conocimiento científico, de la inducción intuitiva y de la fantasía. La péntada invencible ($\acute{\alpha}\nu\iota\chi\iota\alpha$) o número 5, era el número de Afrodita, a la vez simétrico (con respecto a la unidad central) y asimétrico, por ser impar, compuesto del primer número *matriz* o femenino, 2, y del primer número masculino, 3⁽³⁵⁾; el pentágono, y sobre todo el pentagrama, era el símbolo de la vida misma, especialmente como *armonía* en la salud, euforia⁽³⁶⁾.

A pesar de la presencia de los primeros términos de la sucesión fraccionaria de Fibonacci ($\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{8}$, véanse en el cap. II las observaciones de Zeysing) la importancia del número 5 en la teoría de los acordes musicales no parece tener, a primera vista, ninguna relación con las razones que determinan la presencia de la sucesión de Fibonacci, de la sección áurea, de las formas pentámeras, en morfología biológica (crecimiento gnomónico por adiciones elementales, etc.). Se debe simplemente al hecho de que para que dos notas que suenan juntas den un acorde armonioso, las frecuencias de los trenes de ondas sonoras tienen que estar en una razón sencilla en la que no debe aparecer ningún número impar superior a 5. Pero los pitagóricos, que ya habían descubierto esta ley bajo la forma de la variante en la cual, en lugar de vibraciones, intervienen las longitudes correspondientes de la cuerda sonora, no

(35) La atribución de la cualidad *impar* al elemento masculino, fecundador, curiosamente justificada por las teorías genéticas actuales (cromosomas, cigotos, etc.) aparece ya en los ocho *trigramas mágicos* de los cuales los filósofos chinos prehistóricos pretendían, al hablar de un concepto singularmente emparentado con los que encontramos hoy en la teoría de conjuntos y la de grupos de transformaciones (véase cap. IX), sacar por permutaciones y *abultamiento combinatorio*, las características de todos los elementos materiales y espirituales del Universo.

(36) El hecho de que el pentagrama servía de signo de enlace a los pitagóricos está mencionado ya en una acotación de Aristófanes y en un pasaje de Luciano (E. Fourrey, *Curiosités géométriques*, Vuibert, editor, París).

dejaron de admirar esta nueva virtud de la péntada. Pitágoras se detuvo aún a considerar la gama diatónica como derivada de una sucesión de quintas. Si se representa esquemáticamente el monocorde por un círculo en lugar de un segmento rectilíneo, la razón $\frac{2}{3}$ de la quinta determinada sobre las cinco subdivisiones de la cuerda vibrante sugiere naturalmente esta misma razón determinada sobre el círculo por cada lado del pentágono estrellado; y como al número de estos lados corresponde también al de los 5 planetas que con el Sol y la Luna tenían importancia capital en la Astronomía de la Escuela, no nos extrañará percibir en sordina los primeros acordes de la *armonía de las esferas*.

En el fragmento del *Critias* que describe las costumbres de la Atlántida, los períodos alternados de cinco y de seis años desempeñan un papel preponderante en los ritos políticos y religiosos de Poseidón. Era un homenaje combinado tributado (al menos en el espíritu de Platón), por un lado a la Péntada y por el otro a las cualidades estáticas y simétricas del número 6, primer número *perfecto* (es decir igual, no solamente al producto, sino también a la suma de sus divisores 1, 2, 3).

Y en el *Timeo*, como Paccioli nos lo hace notar con orgullo, fuè el dodecaedro *el muy noble cuerpo entre todos los otros*, extensión a tres dimensiones de la simetría pentagonal, y del tema de la sección áurea, el que Platón escogió como símbolo de la armonía cósmica.

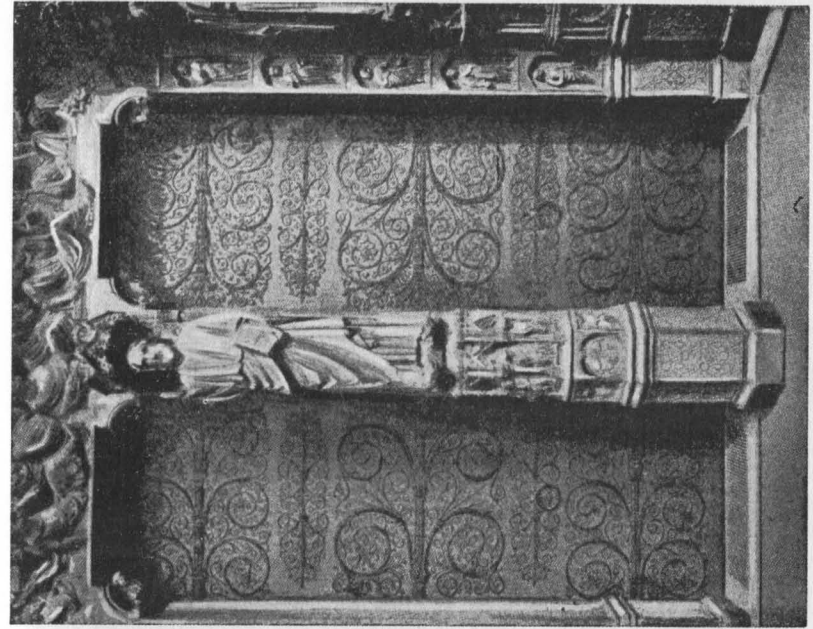


LÁMINA 38. Notre-Dame: portal central.

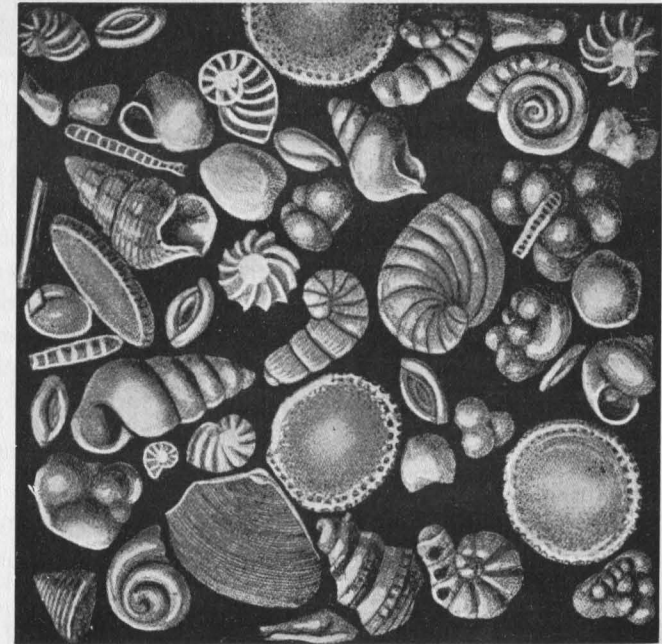


LÁMINA 36. Conchas microscópicas de arena de mar.

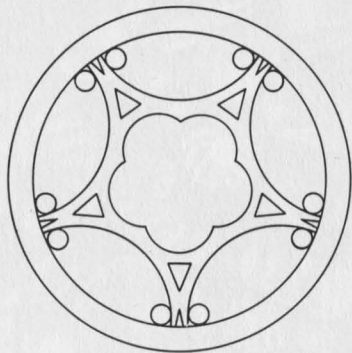


LÁMINA 40. Arriba: Vaso cretense. (Museo de Candía).
Abajo: Notre-Dame: esquema de un rosetón pentagonal.

CAPÍTULO VI

CANONES DINÁMICOS RECTANGULARES Y RADIALES

Donde el que pasa no ve sino una elegante capilla... he cifrado el recuerdo de un día luminoso de mi vida. ¡Oh dulce metamorfosis! Este templo delicado —nadie lo sabe— es la imagen matemática de una hija de Corinto a quien tuvo la dicha de amar. Reproduce fielmente sus proporciones particulares.

PAUL VALÉRY

"Eupalinos o el Arquitecto"

Los autores que después de Paccioli han redescubierto periódicamente y comentado su *divina proporción*, siempre la han considerado como razón de dos longitudes, que se encuentra por ejemplo entre diferentes segmentos de la altura de un edificio, entre las distancias verticales al suelo de la cima de la cabeza y del ombligo en el cuerpo humano, entre las longitudes que separan los nudos consecutivos en los tallos de las plantas, etc.

En el capítulo II hemos demostrado las cualidades abstractas del invariante algebraico, geométrico y aún lógico que caracterizan esta razón a la que Sir Th. Cook tuvo la felicísima idea de dar un estado civil regular al llamarla Φ , y hemos visto en el capítulo anterior cómo su parentesco con todas las sucesiones aditivas de dos tiempos (para las cuales la razón de dos términos consecutivos tiende muy rápidamente hacia Φ) y en particular a la de Fibonacci, explicaba de modo satisfactorio su presencia y la de las formas pentagonales en las proporciones o perfiles de *crecimiento gnomónico* de los organismos vivos, en general, y de las plantas en particular.

Pero la consideración del aspecto puramente *lineal* de esta razón (o de sus convergentes $\frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$ etc.) no bastaba para comprender de qué modo estaba incorporado en el trazado ordenador de aquellos monumentos u objetos antiguos en que se ha comprobado su presencia ⁽¹⁾. Hasta que, re-

(1) "Conocemos mal el mecanismo armonioso de la arquitectura griega. Sólo podemos descubrir sus resultados sin haber descubierto hasta ahora sus fórmulas generales". Viollet-le-Duc, *Dictionnaire de l'Architecture*.